

Álgebra Linear - Exercícios
(Determinantes)

Índice

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Teoria dos Determinantes | 3 |
| 1.1 | Propriedades | 3 |
| 1.2 | Cálculo de Determinantes | 6 |
| 1.3 | Determinantes e Regularidade | 8 |
| 1.4 | Teorema de Laplace | 11 |
| 1.5 | Miscelânea | 16 |

1 Teoria dos Determinantes

1.1 Propriedades

Exercício 1 Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Calcule $|A|$ e $|B|$.
- Calcule $|AB|$ sem realizar o produto AB .
- Calcule $|A^{-1}|$, se existir, sem calcular A^{-1} .

Solução

- a) Dado que se tratam matrizes de ordem 2, utilizemos a "regra da cruz":

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 = -26$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-6) \cdot 2 = 21$$

- b) Sabendo que $|AB| = |A| |B|$, teremos $|AB| = |A| |B| = (-26) \cdot 21 = -546$.
- c) Sabendo que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, teremos $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-26} = -\frac{1}{26}$.

Exercício 2 Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $|A| = 2$. Determine

- $|A^2|$
- $|3A|$
- $|A^{-1}|$
- $|A^k|$
- $|A^T|$

Solução

- a) $|A^2| = |A| |A| = 2 \cdot 2 = 4$
- b) $|3A| = 3^2 \cdot |A| = 9 \cdot 2 = 18$
- c) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

d) $|A^k| = |A|^k = 2^k$

e) $|A^T| = |A| = 2$

Exercício 3 Mostre, calculando directamente os determinantes, as seguintes igualdades:

a)
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

b)
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

c)
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

Solução

a) Utilizemos a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{a_1 a_2 c_3} + \underline{a_2 a_3 c_1} + \underline{a_3 a_1 c_2} - \underline{a_3 a_2 c_1} - \underline{a_2 a_1 c_3} - \underline{a_1 a_3 c_2} = 0$$

b) Utilizemos a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \underline{a_1 b_2 a_3} + \underline{a_2 b_3 a_1} + \underline{a_3 b_1 a_2} - \underline{a_3 b_2 a_1} - \underline{a_2 b_1 a_3} - \underline{a_1 b_3 a_2} = 0$$

c)
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$- \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -(b_1 a_2 - b_2 a_1) = b_2 a_1 - b_1 a_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Exercício 4 Seja A a matriz a seguir indicada onde \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são escalares não nulos. Adicionalmente, seja C uma matriz de ordem 3 tal que $|C| = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

a) Calcule $|A|$.

- b) Calcule $|A^{-1}|$.
- c) Calcule $|A^T|$.
- d) Calcule $|AC|$.
- e) Calcule $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Solução

- a) $|A| = abc$, porque A é uma matriz diagonal, logo o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
- b) $|A^{-1}| = \frac{1}{abc}$, se A for regular.
- c) $|A^T| = |A|$, logo $|A^T| = abc$.
- d) $|AC| = |A| |C|$, logo $|AC| = (abc) \cdot 0 = 0$.
- e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$ resulta de A por troca das linhas 1 e 3, logo $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -|A| = -abc$.

Alternativamente, poderemos aplicar a regra de Sarrus para verificar que o único termo não nulo da matriz A é o termo abc , de paridade ímpar, donde o resultado.

Exercício 5 Considere uma matriz A , quadrada de ordem n . Sejam também as seguintes matrizes: B_1 , que se obtém de A somando à linha i desta matriz uma constante k ; B_2 , que se obtém de A subtraindo à linha i desta matriz a mesma constante k . Mostre que:

$$|A| = \frac{1}{2} (|B_1| + |B_2|)$$

Solução

Exercício 6 Sejam $a, b, c, e, f, p, q, r, s, t, u \in \mathbb{R}$ quaisquer escalares. Calcule o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ q & r & 0 \\ s & t & u \end{bmatrix}$$

Solução

Sabendo que $|AB| = |A||B|$, teremos:

$$\left| \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ q & r & 0 \\ s & t & u \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \right| \cdot \left| \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ q & r & 0 \\ s & t & u \end{bmatrix} \right|$$

Sabendo agora que o determinante de uma matriz triangular superior (ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, teremos:

$$\left| \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \right| = adf$$
$$\left| \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ q & r & 0 \\ s & t & u \end{bmatrix} \right| = pr u$$

O determinante pedido terá portanto o valor $(adf) \cdot (pru) = adfpru$.

Exercício 7 Mostre que, se A é uma matriz de ordem n satisfazendo $A^5 = 0$, então $|A| = 0$.

Solução

$$A^5 = 0 \Rightarrow |A^5| = 0 \Rightarrow |A|^5 = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

Exercício 8 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \det(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Solução**1.2 Cálculo de Determinantes**

Exercício 9 Calcule, por condensação, os determinantes das seguintes matrizes:

$$a) \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e) 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$g) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$i) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 10 Calcule o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 11 Resolva as seguintes equações:

$$a) \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; b) \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solução

Em ambos os casos utilizamos a regra deSarrus para calcular o determinante de ordem 3.

$$a) \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 0 + 2 - (2 + 0 - 2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 - 12 + 9x - (18 - 3x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Exercício 12 *Seja*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 4-x & -5 \\ 1 & -1 & 3-x \end{bmatrix}$$

Calcule $\det(A)$ e determine $\frac{dA(x)}{dx}$.

Solução

Utilizemos a regra de Sarrus para calcular o determinante pedido:

$$\begin{aligned} |A(x)| &= \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 4-x & -5 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = \\ &= (2-x)(4-x)(3-x) + 0 - 15 - (4(4-x) + 5(2-x) + 0) = \\ &= -17 - 17x + 9x^2 - x^3. \\ \frac{dA(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}(-17 - 17x + 9x^2 - x^3) = -17 + 18x - 3x^2 \end{aligned}$$

Exercício 13 *Verifique que*

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Calcule $\det(A)$ e determine $\frac{dA(x)}{dx}$.

Solução

1.3 Determinantes e Regularidade

Exercício 14 *Recorra ao cálculo de determinantes para determinar a regularidade das seguintes matrizes:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solução

Exercício 15 Mostre que é falsa a seguinte proposição: $|A| = 1 \implies A^{-1} = A$.

Solução

Vamos exibir um contra-exemplo. Por exemplo, tome-se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se obviamente $|A| = 1$. No entanto,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \hat{A} = \hat{A} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo $A^{-1} \neq A$.

Exercício 16 Determine o escalar k para o qual a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ é singular.

Solução

Utilizemos a regra de Sarrus para calcular o determinante de A .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 5 + 9k + 10 - (-5k + 3 - 30) \\ &= 42 + 14k \end{aligned}$$

Conclui-se assim que $|A| = 14k + 42$. Como A é regular se e só se $|A| \neq 0$, então, se $|A| = 0$, a matriz A será singular:

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 42 + 14k = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = -3 \end{aligned}$$

Logo, A é singular se $k = -3$.

Exercício 17 Considere as seguintes matrizes reais:

$$i) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ii) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad iii) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando a Teoria dos Determinantes determine os valores λ para os quais a matriz $\lambda I - A$ é singular.

Solução

Exercício 18 Mostre que o sistema de equações $Ax = b, b \in \mathbb{R}^k$ tem uma única solução, para as seguintes matrizes do sistema:

$$i) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ii) A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, aplique a regra de Cramer para resolver os sistemas.

Solução

Exercício 19 Calcule a matriz adjunta das seguintes matrizes:

$$i) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad ii) A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, aplique a regra de Cramer para resolver os sistemas de equações

$$i) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ii) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solução

1.4 Teorema de Laplace

Exercício 20 Determine os menores complementares e os complementos algébricos das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & -6 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 21 Considere a matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $\det(A_n) = D_n$ mostre que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ e deduza que $D_n = n + 1$.

Solução

Exercício 22 Se A_n é uma matriz tridiagonal com o valor "1" nas sub e super diagonais,

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

... calcule $\det(A_n)$.

Solução

Exercício 23 *Mostre que o determinante*

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

... não depende de θ .

Solução

Calculemos o determinante aplicando o Teorema de Laplace à 3ª coluna:

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} \\ &= A_{33} \\ &= (-1)^{3+3} M_{33} \\ &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

Assim, dado que $|A| = 1 \neq 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$, conclui-se que A é regular $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Exercício 24 *Mostre que a matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

... é regular qualquer que seja θ . Determine a sua inversa utilizando a matriz adjunta.

Solução

Calculemos o determinante aplicando o Teorema de Laplace à 3ª linha:

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} \\ &= A_{33} \\ &= (-1)^{3+3} M_{33} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

Assim, dado que $|A| = 1 \neq 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$, conclui-se que A é regular $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Calculemos então a matriz adjunta, \hat{A} :

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cos(\theta) & (-1)^{1+2} (-\sin(\theta)) & (-1)^{1+3} 0 \\ (-1)^{2+1} \sin(\theta) & (-1)^{2+2} \cos(\theta) & (-1)^{2+3} 0 \\ (-1)^{3+1} 0 & (-1)^{3+2} 0 & (-1)^{3+3} 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Logo } A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \hat{A} = \hat{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Exercício 25 Calcule o determinante da seguinte matriz por aplicação do Teorema de Laplace à 3ª linha,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 26 Determine a inversa, se existir, das seguintes matrizes recorrendo à Teoria dos Determinantes:

$$\begin{aligned}a) A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} & b) A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ c) A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} & d) A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$e) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad h) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i) A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad j) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$l) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad m) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$n) A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 21 & 8 & 17 \\ 4 & 12 & -4 & 13 \\ 0 & -3 & -12 & 2 \end{bmatrix} \quad o) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad q) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad s) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$t) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 27 Considere a matriz,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 1 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 1 & 0 & c & a \end{bmatrix}$$

Calcule $|A|$ com recurso ao Teorema de Laplace.

Solução

Exercício 28 Mostre que o *determinante de Vandermonde* satisfaz a seguinte igualdade:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Solução

Exercício 29 Mostre que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdots b_n$$

Solução

Exercício 30 Mostre que, se $a \neq b$:

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Qual a solução se $a = b$?

Solução

Exercício 31 Calcule o seguinte determinante de ordem $n + 2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ 1 & a_2 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Solução

1.5 Miscelânea

Exercício 32 Considere a matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcule A^3 .
- Utilize álgebra matricial para calcular $(I - A)(I + A + A^2)$.
- Calcule $|A|$, $|I - A|$ e $|I + A + A^2|$.

Solução

Exercício 33 Considere as matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) Mostre que $A + B^3 = A$.
b) Sabendo que

$$A = AB - \frac{1}{2}AB^2 - B^3 - \frac{1}{2}AC + I$$

... obtenha a expressão matricial da inversa da matriz A e aproveite o resultado para calcular A^{-1} .

- c) Sabendo que $M = \frac{1}{2}(A + B^3)^T D^{-1}$ e $|D| = \frac{1}{2}$ calcule o determinante da matriz M . O resultado obtido permite estabelecer alguma relação entre a matriz M e a inversa da matriz A .

Solução

Exercício 34 Considere a matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ e simétrica, definida da seguinte forma:

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^2, & i = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2, & i = 2, 3, 4 \end{cases}; a_{ij} = \alpha\beta, i = 1, 2, 3; j = i + 1$$

... com $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Seja B uma matriz triangular inferior, cujos elementos são definidos por:

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = j = 1, 2, 3, 4 \\ \beta, & j = 1, 2, 3; i = j + 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

- a) Mostre que $A = BB^T$.
b) Obtenha o determinante de A .

Solução

Exercício 35 Mostre que o determinante da matriz de ordem n ,

$$A = \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{bmatrix}$$

... é igual a $a(x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

Solução

Começamos por proceder à condensação da primeira coluna da matriz A através de operações de Jacobi, as quais, como sabemos, não alteram o valor de um determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \\ &\quad (\text{fazendo } L_i \leftarrow L_i + (-a)L_n, i = 1, \dots, n-1) \\ &= \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 & a-x \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & a-x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \\ &\quad (\text{fazendo } C_n \leftarrow C_n + C_j, j = 1, \dots, n-1) \\ &= \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ a & a & \cdots & a & x+(n-1)a \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Laplace à última coluna da matriz obtida, teremos:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ a & a & \cdots & a & x+(n-1)a \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a](-1)^{n+n} \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1} \end{aligned}$$

Exercício 36 *Exprima o determinante da seguinte matriz de ordem n como um polinómio em x .*

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x-a_1 \end{vmatrix}$$

Solução

Comecemos por aplicar $n-1$ operações de Jacobi sobre as colunas:

1ª operação: $C_2 \leftarrow C_2 + (-x)C_1$:

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x-a_1 \end{vmatrix}$$

2ª operação: $C_3 \leftarrow C_3 + (-x)C_2$:

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & -x^3 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x - a_1 \end{vmatrix}$$

(...)

$(n-2)$ -ésima operação: $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} + (-x)C_{n-2}$:

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & -x^3 & \cdots & -x^{n-2} & -x^{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x - a_1 \end{vmatrix}$$

$(n-1)$ -ésima operação: $C_n \leftarrow C_n + (-x + a_1)C_{n-1}$:

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & -x^3 & \cdots & -x^{n-2} & -x^{n-1} & -a_n - x^{n-1}(-x + a_1) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicamos agora $n-2$ operações de Jacobi sobre as colunas:

1ª operação: $C_n \leftarrow C_n + a_{n-1}C_1$:

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & -x^3 & \cdots & -x^{n-2} & -x^{n-1} & -a_n - x^{n-1}(-x + a_1) + a_{n-1}x \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2ª operação: $C_n \leftarrow C_n + a_{n-2}C_2$:

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & -x^3 & \cdots & -x^{n-2} & -x^{n-1} & -a_n - x^{n-1}(-x + a_1) + a_{n-1}x - a_{n-2}x^2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(...)

$(n - 2)$ -ésima operação: $C_n \leftarrow C_n + a_2 C_{n-2}$:

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & -x^3 & \dots & -x^{n-2} & -x^{n-1} & -a_n - x^{n-1}(-x + a_1) + a_{n-1}x - \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j}x^j \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicamos agora o Teorema de Laplace à última coluna da matriz obtida:
 $(-a_n - x^{n-1}(-x + a_1) + a_{n-1}x - a_{n-2}x^2 - \dots - a_n x^{n-2}) (-1)^{1+n} |I_{n-1}| =$
 $= (-a_n - x^{n-1}(-x + a_1) + a_{n-1}x - a_{n-2}x^2 - \dots - a_n x^{n-2}) (-1)^{1+n} =$
 $= (-1)^{1+n} (-a_n + a_{n-1}x - a_{n-2}x^2 - \dots - a_2 x^{n-2} - a_1 x^{n-1} - x^n)$
 A expressão anterior é, obviamente, um polinómio de grau n em x .

Exercício 37 Calcule os seguintes determinantes:

i) $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ y & z & t & x \\ z & t & x & y \\ t & x & y & z \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Solução

Exercício 38 Seja a matriz,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

a) Calcule $\det(A - t \cdot I_3)$ e exprima-o como um polinómio em t da forma

$$\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$$

b) Como é que os coeficiente α e γ da equação anterior estão relacionados com $\text{tr}(A)$ e $\det(A)$?

Solução

Exercício 39 Seja a matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- a) A matriz \mathbf{A} diz-se nilpotente se $A^p = 0_n$ para algum $p \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que, se \mathbf{A} é nilpotente então $\det(A) = 0$.
- b) A matriz \mathbf{A} diz-se anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que, se \mathbf{A} é anti-simétrica e n é par então $\det(A) = 0$.
- b) A matriz \mathbf{A} diz-se ortogonal se $AA^T = I$. Mostre que, se \mathbf{A} é ortogonal então $\det(A) = \pm 1$.

Solução

Exercício 40 Sabendo que 7, 956, 8, 766, 1, 233 e 4, 590 são todos divisíveis por 9, mostre que $\det(B)$ também é divisível por 9 sem avaliar $\det(B)$ explicitamente.

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 41 Seja

$$D = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

... onde $A \in M_q(\mathbb{K})$, $C \in M_r(\mathbb{K})$, $r+q = n$. Adicionalmente, $B \in M_{q \times r}(\mathbb{K})$ e 0 é a matriz nula de ordem $r \times q$. Mostre, por indução sobre \mathbf{r} , que:

$$\det(D) = \det(A) \cdot \det(C)$$

Solução