Cálculo Combinatório

Introdução

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal(1623-1662).
A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar, de uma forma indirecta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Factorial

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o factorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

$n! = n.(n-1).(n-2). \ldots .4.3.2.1$, para $n \geq 2$

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.
Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
b) 4! = 4.3.2.1 = 24
c) 6! = 6.5.4!
d) 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1
e) 10! = 10.9.8.7.6.5!
f) 10! = 10.9.8!

Princípio fundamental da contagem PFC

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:

$T = k_1 . k_2 . k_3 . \ldots . k_n$

Exemplo:

Sabendo que as matrículas do carros portugueses usam 2 letras do alfabeto e 4 algarismos, qual o número máximo de matrículas com esse formato (dígito-dígito-letra-letra-letra-letra)

Solução:

Como o alfabeto possui 26 letras e nosso sistema numérico possui 10 algarismos (de 0 a 9), podemos concluir que: para a 1ª posição, temos 10 alternativas, e como pode haver repetição, para a 2ª também temos 10 alternativas. Em relação as letras, concluímos facilmente que temos 26 alternativas para cada um dos 4 lugares. Podemos então afirmar que o máximo de matrículas será de 10*10*26*26*26*26= 45697600!

Permutações simples

Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo:

Com os elementos A, B, C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é

$P_n = n!$ onde **$n! = n(n-1)(n-2)\ldots .1$.**

Exemplos:

a) $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

b) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco rectangular de cinco lugares.

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Denomina-se ANAGRAMA o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo:

Os possíveis anagramas da palavra REI são:
REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

Permutações com elementos repetidos

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,\ldots)} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}$$

Exemplo:

Determine o número de anagramas da palavra MATEMATICA.

Solução:
Temos 10 elementos, com repetição. Observe que a letra M está repetida duas vezes, a letra A três, a letra T, duas vezes. Na fórmula anterior, teremos: n=10, a=2, b=3 e c=2. Sendo k o número procurado, podemos escrever:
k= 10! / (2!.3!.2!) = 151200
Resposta: 151200 anagramas.

Arranjos simples

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de taxa k, a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto E = {a,b,c}, teremos:
a) Arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
b) Arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por $A_{n,k}$, teremos a seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Obs.: é fácil perceber que $A_{n,n} = n! = P_n$.

Exemplo:

Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abri-lo?

Solução:

As sequências serão do tipo xyz. Para a primeira posição teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:
10.9.8 = 720.
Observe que 720 = $A_{10,3}$

Combinações simples

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Exemplo:

No conjunto E= {a,b.c,d} podemos considerar:
a) combinações de taxa 2: ab, ac, ad,bc,bd, cd.
b) combinações de taxa 3: abc, abd,acd,bcd.
c) combinações de taxa 4: abcd.

Representando por $C_{n,k}$ o número total de combinações de n elementos tomados k a k (taxa k) , temos a seguinte fórmula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obs: o número acima é também conhecido como **Número binomial** e indicado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo:

Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:
$C_{15,10}$ = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) = 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003

Tente resolver os 3 problemas seguintes:

1) - Um cocktail é preparado com duas ou mais bebidas distintas. Se existem 7 bebidas distintas, quantos cocktails diferentes podem ser preparados?
Resp: 120

2) - Sobre uma circunferência são marcados 9 pontos, dois a dois distintos. Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos 9 pontos marcados?
Resp: 84
3) - Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Sabendo que somente 2 pessoas sabem dirigir, de quantos modos poderão se acomodar para uma viagem?
Resp: 48

Exercício resolvido:

Um salão tem 6 portas. De quantos modos distintos esse salão pode estar aberto?

Solução:

Para a primeira porta temos duas opções: aberta ou fechada
Para a segunda porta temos também, duas opções, e assim sucessivamente.
Para as seis portas, teremos então, pelo Princípio Fundamental da Contagem PFC:
N = 2.2.2.2.2.2 = 64
Lembrando que uma dessas opções corresponde a todas as duas portas fechadas, teremos então que o número procurado é igual a 64 - 1 = 63.
Resposta: o salão pode estar aberto de 63 modos possíveis.

Vimos em *Análise Combinatória* que o número de combinações simples de n elementos de um conjunto dado, tomados k a k, ou seja, de taxa k, é dado por:
$C_{n,k}$ = n! / k! (n – k)! onde n! = 1.2.3.4.5. ... .(n – 1).n, é denominado *factorial de n*.

Exemplo:
$C_{7,5}$ = 7! / 5! (7 – 5)! = 7! / 5! 2! = (7.6.5.4.3.2.1)/(5.4.3.2.1.2.1) = 21

Considere o conjunto A = {a, b, c, d, e} formado por cinco elementos distintos.
As combinações desses cinco elementos tomados dois a dois são:
ab ac ad ae bc bd be cd ce de , num total de 10 combinações.
Realmente são 10 combinações, pois:
$C_{5,2}$ = 5! / 2!(5 – 2)! =(5.4.3.2.1) / (2.1.3.2.1) = 10.

As combinações desses cinco elementos tomados três a três são:
abc abd abe acd ace ade bcd bce , num total de 10 combinações.
Realmente neste caso, também são 10 combinações, pois:
$C_{5,3}$ = 5! / 3!(5 – 3)! = (5.4.3.2.1) / (3.2.1.2.1) = 10.

Observe que no conjunto dado, para cada combinação de taxa dois, corresponde uma única combinação de taxa três, ou seja, definida uma combinação de taxa dois, fica definida imediatamente uma outra combinação (dita complementar) de taxa três. Isto justifica o fato de que $C_{5,2} = C_{5,3}$
Assim, por exemplo, no caso acima, poderemos escrever as combinações e suas respectivas combinações complementares:

Combinação	Combinação complementar
ab	cde
ac	bde
ad	bce
ae	bcd
bc	ade
bd	ace
be	acd
cd	abe
ce	abd
de	abc

De uma forma geral, num conjunto de n elementos, para cada combinação dos n elementos tomados k a k, ou seja, de taxa k, corresponderá uma única combinação complementar formada pelos n – k elementos restantes e, portanto, deveremos ter sempre
$\mathbf{C_{n,k} = C_{n,n-k}}$.

Isto pode também ser verificado algebricamente, conforme mostraremos a seguir:

Já sabemos que:

$\mathbf{C_{n,k} = n! \,/\, k!\,(n-k)!}$

Para $C_{n,n-k}$ poderemos escrever:
$\mathbf{C_{n,n-k} = n! \,/\, [(n-k)!\,[n-(n-k)] = n! \,/\, (n-k)!\,k! = C_{n,k}}$

Assim, poderemos exemplificar:

$C_{7,3} = C_{7,4}$ porque 3 + 4 = 7.
$C_{1000,60} = C_{1000,940}$ porque 60 + 940 = 1000.
$C_{700,100} = C_{700,600}$ porque 100 + 600 = 700.

Genericamente,
$\mathbf{C_{n,n-k} = C_{n,k}}$ porque (n – k) + k = n.

Um caso particular e importante é obtido fazendo k = 0 na igualdade acima, obtendo-se:
$C_{n,n-0} = C_{n,0}$ ou seja: $\mathbf{C_{n,n} = C_{n,0}}$

Pela fórmula $C_{n,k} = n! / k!\,(n-k)!$ **,** fazendo k = 0, obteremos finalmente:
$C_{n,0} = n! / 0!\,(n-0)! = n! / n! = 1$**,** já que, por definição , o factorial de zero é igual a 1 ou seja, **0! = 1**.
Portanto, $\mathbf{C_{n,n} = C_{n,0} = 1}$.

Exercício resolvido

Determine o conjunto solução da equação $C_{200\,,\,2x} = C_{200,9-x}$

Solução:

Deveremos ter: $2x = 9 - x$ ou $2x + 9 - x = 200$.

Da primeira, tiramos: $2x + x = 9 \therefore x = 3$.

Da segunda, tiramos: $2x - x = 200 - 9 \therefore x = 191$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{3, 191\}$

Exercício proposto:

Resolva a equação $C_{14,\, x+2} = C_{14,\, 5x}$

Resposta: $S = \{2\}$.

Enviar comentários para: Sérgio Silva