A POLÉMICA SOBRE O AXIOMA DAS PARALELAS

O 5º postulado de Euclides tem um enunciado complicado que equivale ao seguinte:

" Por um ponto exterior a uma recta passa uma só paralela a essa recta".

A legitimidade da aceitação deste facto como axioma foi posta em causa e levantou controvérsias, muito antes da grande revisão de fundamentos que caracterizou o séc. XIX.

Havia a convicção de que um axioma tinha de ser "evidente" por si mesmo e, se não o era, tinha de ser demonstrado. Ora o axioma das paralelas não era considerado evidente pelo que deveria ser demonstrado consequência dos axiomas anteriores, ou seja, demonstrável.

Ao longo dos séculos muitos matemáticos, alguns ilustres (por exº . Le Pére Sacheri, Legendre, Gauss), tentaram sem sucesso, provar o V postulado.(*)

Até que, em meados de séc. XIX, o húngaro Bolyai (1832) e o russo Lobatchewsky (1840), trabalhando independentemente e quase secretamente, resolveram tentar a única via que restava: construir uma geometria aceitando todos os axiomas de Euclides excepto o V.

Verdadeiramente o que esperavam e desejavam era encontrar uma contradição; mas não a encontraram... Provaram assim que é possível construir sistemas consistentes de geometria negando o axioma V: Estavam criadas as **geometrias não euclidianas.**

(*) Extracto duma carta de Gauss escrita em 1817:

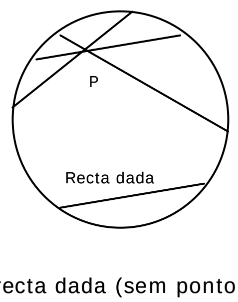
> <<Estou cada vez mais convencido de que não se pode demonstrar pelo simples raciocínio a necessidade da geometria euclidiana. É possível que no futuro possamos ter ideias sobre a natureza do espaço que hoje nos são inacessíveis>>
>
> (Citada em "Mathématiques au fil des âges")

Ficou provada, ao mesmo tempo, a independência, deste axioma, dando razão a Euclides, 22 séculos depois.

David Hilbert na sua célebre axiomática para a geometria clássica -*Grundlagen der Geometrie* – conserva com o nome de "AXIOMA DE EUCLIDES" um axioma isolado para a *unicidade da paralela.*

Na geometria de Lobatchewsky aceita-se que <<por um ponto exterior a uma recta passam muitas paralelas a essa recta>>. Haverá um modelo para um tal esquema?

Um modelo possível consiste em tomar o <<plano>> como um disco ou círculo e as rectas como cordas:




Por P passam muitas <<rectas>> paralelas à recta dada (sem ponto comum)

Um outro modelo de Poincarré (1854-1912) toma para o <<plano>> um semiplano aberto a para <<recta>> uma semicircunferência centrada na origem do semiplano.

Por P passam infinitas <<rectas>> que não tocam (paralelas) a recta dada.

Na geometria de Lobatchewsky a soma dos ângulos de um triângulo é inferior a dois rectos.

Em 1854 Georg Riemann apresenta um outro sistema geométrico a duas dimensões em que o <<plano>> é uma superfície esférica e as <<rectas>> são meridianos (circunferências máximas)

Por um ponto P exterior a AB não passa nenhuma <<recta>> que não corte AB. Não passa então nenhuma paralela a AB. Nesta geometria Riemann, dois pontos podem não definir uma recta e a soma dos ângulos de um triângulo é superior a dois rectos.

Hoje pensa-se que se podem considerar 3 sistemas de geometrias a duas dimensões:

Parabólico – por um ponto passa um só paralela a uma recta dada ( caso da geometria euclidiana )

Hiperbólico – por um ponto passa mais do que uma paralela a uma recta dada

Elíptico – por um ponto não passa nenhuma paralela a uma recta dada.

Ver C.Boyer, A history of Mathematica,89

Comentários para: Sergio Silva