Factoriais fraccionários, irracionais e negativos

Hindemburg Melão Jr.

Fatoriais fracionários, irracionais e negativos

A idéia de que é possível calcular fatoriais de números decimais, parte da analogia entre uma produtór
logaritmo de uma somatória:

$$\sum_{i=1}^{n} i + a = an + \frac{n(n+1)}{2}, \{0 \leq a \leq 1\}$$

$$\prod_{i=1}^{n} i + a = anti\log \sum_{i=1}^{n} \log(i+a) = (N+a)!, \{a=0\}$$

mparando $N!$ com N^N, usando diferentes valores para N, notamos que N^N cresce num ritm
oximadamente igual a e, isto é $\frac{N!(N+1)^{N+1}}{(N+1)N^N} \cong e$ *{válido para **N** grande}*. Disso concluímos qu
$\frac{N!e^N}{N^N\sqrt{N}} \cong$ *constante* $\cong \sqrt{2\pi}$, que prontamente nos dá $N! \cong N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$, válido para N inteiro ou

cimal. Ex.: ***5!=120***, e pela função $N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$ encontramos ***118 para N=5***. A aproximação
nto melhor se tanto maior for o valor de ***N***. Esse é a função de Stirling, e chegar até aqui não represen
nhuma novidade. Felizmente na época eu desconhecia essa função, caso contrário, talvez me desse p
tisfeito ao chegar aqui, concluindo que nada mais havia a ser feito. Com a função de Stirling podemos ob
lores muito aproximados para ***N*** inteiro, o que leva a crer que são muito aproximados também para ***N*** decim
rling também encontrou uma série infinita que fornece fatores de ajuste muito bons, permitindo melhorar
ecisão. Ex.: $N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}(1+\frac{1}{12N})$, com a qual encontramos ***119,99 para N=5***, mas não impo
antos termos sejam incluídos na série, nunca se consegue uma boa precisão para ***N*** pequeno. Em princípio
tava seguindo o mesmo caminho equivocado de Stirling, usando fatores de ajuste, mas notei que pode
correr a um pequeno artifício e produzir resultados exatos, em vez de aproximações. Vejamos:

$\frac{(N+a)!}{a!} = \prod_{i=1}^{N} i+a$, logo $(N+a)! = \frac{(N+M+a)!}{\prod_{i=N+1}^{N+M} i+a}$ e portanto temos:

$$(N+a)! = \lim_{x\to\infty} \frac{x+a^{x+a}\ e^{-x-a}\ \sqrt{2\pi(x+a)}}{\prod_{i=N+1}^{x} i+a}$$

Download de planilha Excel

Novo método

O outro método é muito mais simples. Apenas recorro a uma interpolação:

$$(N+a)! \simeq N!(N+a)^{a}$$

Cujos resultados são muito próximos dos produzidos pela função de Stirling para $0<a<1$, e tem
tude de produzir resultados exatos sempre que a=0 ou a=1, enquanto a função de Stirling erra nesses casos.
Para produzir resultados exatos em todos os casos, basta usar o mesmo artifício de antes:

$$(N+a)! = \lim_{x\to\infty} \frac{x!(x+a)^{a}}{\prod_{i=N+1}^{x} i+a}$$

Nitidamente mais simples e igualmente eficaz!

tas:
todos os casos considerados acima, ***N*** é inteiro.
a todo ***N*** negativo, se ***a*** é positivo e tende 0 então ***(N+a)!*** tende a +infinito.
a todo ***N*** negativo, se ***a*** é negativo e tende 0 então ***(N+a)!*** tende a -infinito.
nbro-me vagamente de que para ***N*** entre 0 e +infinito, havia um mínimo em torno de 0,46! Quando ***N*** é muito grande, havia uma constan
tc. Já não me recordo de todos os pormenores. Lembro-me também que o Dr. Piza me mostrou que é possível calcular fatoriais de núme
s do tipo ***(a+bi)!***