O Ciclóide

O que é?

Sobre o lado de uma roda de um carro ou de uma bicicleta marca-se um ponto, por exemplo com giz. A curva descrita por esse ponto quando o carro ou a bicicleta estiver em movimento é uma das mais famosas na história da matemática e chama-se *ciclóide.* Esta curva tem uma série de propriedades curiosas.

Como desenhar um ciclóide?

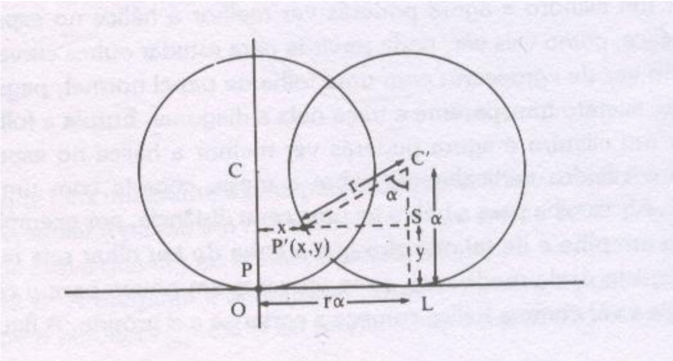
Recorte um círculo de cartão com 4 cm de diâmetro. Faça um pequeno corte na borda da roda para meter o bico do lápis. Coloque uma régua sobre uma folha de papel e faça rodar a roda apoiada sobre a régua. O desenho que irá obter será muito aproximadamente um ciclóide.

Propriedades

1- " A área por baixo da ciclóide é exactamente 3 vezes a área do círculo que lhe dá origem"

Observando a área compreendida entre um arco de ciclóide e a recta sobre a qual rodou o círculo poderá dificilmente concluir que essa área é 3 vezes maior do que a área do ciclo, mas com a ajuda de papel milimétrico poderá comparar mais facilmente. Um dos mais famosos matemáticos, Galileu, também se interessou por este problema e fez a seguinte experiência: recortou um círculo e a área descrita pelo ciclóide em madeira, pesou-as e descobriu que a área por baixo do ciclóide é 3 vezes maior do que a do círculo. Mas, desconfiado com a exactidão desse número e estando esse número "próximo" do nosso conhecido π, conjecturou que a área por baixo da ciclóide tinha de ser π vezes a do círculo. Mas afinal em que é que ficamos?
Roberval e Torricelli demonstram o seguinte: " A área por baixo da ciclóide é EXACTAMENTE três vezes a área do círculo que lhe dá origem."

<u>Demonstração</u>: Iremos em primeiro deduzir a equação da ciclóide para podermos ter um ponto de partida... Consideremos um referencial ortonormado XOY e façamos rodar um círculo , de centro C, de raio r e com um ponto P pertencente ao círculo, sobre o eixo das abcissas. Quando o centro C passar para uma posição C' o ponto P terá passado para um posição P'. É este o ponto cuja equação queremos! Antes de prosseguir vamos observar o nosso esquema:



As coordenadas de P serão (x,y). Do desenho podemos observar o seguinte:

- O comprimento do arco LP' é igual ao comprimento do segmento OL (Porquê?)
- Sabendo que α é o ângulo LCP' (em radianos), temos que OL = LP'= rα.
- x = OL – P´S = rα-r. sen α
- y = SL = C'L – C'S = r – r. cos α

Obtemos assim a equação em coordenadas paramétricas da ciclóide:

$$\begin{cases} x = r\alpha - r.sen\alpha \\ y = r - r.sen\alpha \end{cases}$$

Iremos passar agora ao cálculo da nossa área:

Com já temos a equação geral da curva vem,

$$\int_0^{2\pi r} ydx = \int_0^{2\pi} (r - r\cos\alpha)(r - r\cos\alpha)d\alpha = 3\pi r^2$$

ou seja precisamente 3 vezes a área de um círculo de raio r.

2- **"O comprimento de uma ciclóide é 4 vezes o diâmetro do círculo que lhe dá origem"**

Como já deve ter pensado, pode perfeitamente comprovar esta propriedade com um fio: Recorte uma ciclóide em cartão grosso, pega num fio e coloca-o ao longo da borda desse cartão e mede.

<u>Demonstração</u>:

$$\frac{dx}{d\alpha} = r(1 - \cos\alpha) \qquad \frac{dy}{d\alpha} = r.sen\alpha$$

Comprimento da ciclóide = $\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = r.\sqrt{2}.\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\alpha}d\alpha$

$= 2r\int_0^{2\pi} sen\frac{\alpha}{2}d\alpha = 4r\left[-\cos\frac{\alpha}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r$

Logo o comprimento da ciclóide é 8 o raio do nosso círculo, que é precisamente 4 vezes o diâmetro.

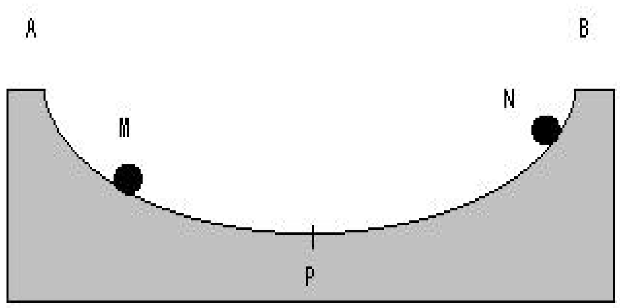
Podemos também deduzir o comprimento desde o ponto O até ao ponto correspondente ao valor β do parâmetro seguindo os mesmo raciocínio:

$$2r\int_0^{\beta} sen\frac{\alpha}{2}d\alpha = 4r\left[-\cos\frac{\beta}{2}\right]_0^{\beta} = 4r(1 - \cos\frac{\beta}{2}) = 8r.sen^2\frac{\beta}{4}$$

3- "A ciclóide é tautócrana"

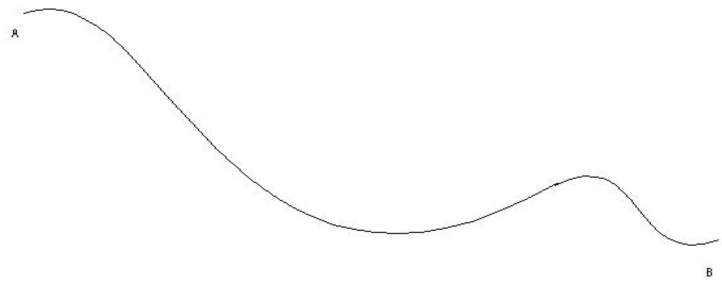
Tautócrana ? Mas que raio é isso?

Imaginemos que pomos uma ciclóide virada para cima (ver figura), e deixamos cair dois berlindes por ela abaixo, um do ponto M e outro de N. O que acontece? De facto, por mais incrível que possa parecer os berlindes chegam ao mesmo tempo ao ponto mais baixo da ciclóide, independentemente do comprimento do caminho que cada berlinde percorre. Fazendo uso desta propriedade, Huygens construiu um relógio de pêndulo que mesmo quando a amplitude do movimento variasse e ficasse maior ou mais pequena, o pêndulo continuava a marcar o tempo igualmente bem, isto é, tinha o mesmo período.

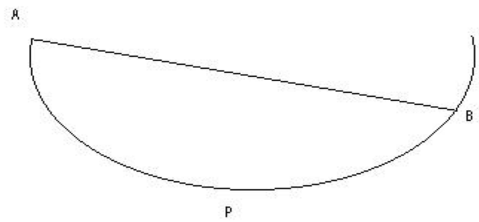


3- “A ciclóide é braquistócrana”

Ser braquistócrana significa ser a curva de descida mais rápida, no seguinte sentido. Marca-se dois pontos A e B num plano vertical, a alturas diferentes .



Supomos que temos um arame e uma pérola de colar. Vamos unir A e B com o arame, enfiar a pérola em A e fazê-la cair pelo arame até B. Para cada forma de curva que dês ao arame, a pérola levará um certo tempo a cair de A até B. A pergunta é agora: que forma se haverá de dar ao arame para que a pérola chegue a B no menor tempo possível? Pois acontece que a forma é precisamente a da ciclóide que sai verticalmente de A e passa por B, do seguinte modo:



Curioso, não é? O segmento de recta AB dá a menor distância entre A e B, mas a bola que cai pelo plano inclinado AB demora mais por esse caminho do que se for por APB descendo primeiro até P e depois subindo até B!

Enviar comentários para: Sérgio Silva